20101015707

专业：数学（一级学科）、学科教学（数学）专业

教参	北京出版集团公司 北京出版社 《 高等数学》第二版
试教内容	第四章　导数与微分 4.5 隐函数与参数求导法则 （页码：P60-62）

§ 4.5 隐函数与参数求导法则

一、隐函数求导法

由二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定的 y 与 x 的函数关系称为隐函数. 其中因变量 y 不一定能用自变量 x 直接表示出来. 例如，$xe^y-y+1=0$ 所确定的函数就不能写成 $y=f(x)$（显函数）形式，因而称为隐函数.

若在 $F(x,y)=0$ 中确定 y 是 x 的函数 $y=y(x)$ 可导，则此隐函数的导数 $y'=y'(x)$ 可以由方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y)=0$$

直接求得，其中 $F(x,y)$ 中的 y 必须当作 x 的函数看待. 这种求导方法叫作隐函数求导法.

例 1 求下列隐函数的导数：

(1)$x^2+y^3-1=0$；

(2)$xe^x-y+1=0$；

(3) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

解 (1) 这里 y^3 可看成 x 的复合函数，将方程两边对 x 求导得：

$$2x+3y^2y'=0,$$

所以 $$y'=\frac{-2x}{3y^2}=\frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}.$$

(2) 这里 y 可看成 x 的复合函数，将方程两边对 x 求导得：

$$e^x+xe^x-y'=0,$$

所以 $$y'=e^x+xe^x.$$

(3) 这里 $\sqrt{y}$ 可看成 x 的复合函数，将方程两边对 x 求导得：

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'=0,$$

所以 $$y'=-\sqrt{\frac{y}{x}}\,(x>0,y>0).$$

二、对数求导法

对表达成积、商、幂形式的函数和形如 $[f(x)]^{g(x)}$ 的函数求导时，往往先对函数两边直接取对数，再根据隐函数求导法则求导数，这一方法叫作对数求导法.

因为积、商、幂形式的对数可以写为对数之和、差及倍数，所以可以分项求导而得结果. 而 $[f(x)]^{g(x)}$ 之类的函数，由于它既不是幂函数，又不是指数函数，因此必须将它看作复合函数，然后再进行求导，而用取对数求导就避开了这个问题，显得特别简单.

例 2 求下列函数的导数：

(1)$y=x^x$；

(2)$y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}}$ $(x>3)$.

解 (1) 对函数两边直接取对数，有

$$\ln y=\ln x^x=x\ln x.$$

等式两边分别对 x 求导(注意 y 是 x 的函数)，有

$$(\ln y)'=(x\ln x)',$$

$$\frac{y'}{y}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x},$$

于是 $$y'=y(\ln x+1)=x^x(1+\ln x).$$

(2) 对函数两边直接取对数，有

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)].$$

等式两边分别对 x 求导(注意 y 是 x 的函数)，有

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right),$$

于是 $y'=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right).$

三、参数求导法则

一般地，若参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$$

确定 y 与 x 的函数关系式 $y=y(x)$（或 $x=x(y)$），则称此函数关系所表达的函数为由参数方程所确定的函数.

下面介绍借助于参数 t 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的方法，称为参数求导法则. 假定函数 $x=\varphi(t)$、$y=\psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$. 于是根据复合求导法则与反函数导数公式，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

例 3 求由方程 $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 所确定的函数 y 对 x 的一阶导数.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t.$

练习题 4.5

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^{2x}$；

(2) $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

2. 求下列参数方程所确定的函数的导数：

(1) $\begin{cases}x=a\cos^3\varphi,\\ y=b\sin^3\varphi,\end{cases}$ 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

(2) $\begin{cases}x=1-t^2,\\ y=t-t^3,\end{cases}$ 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

3. 求下列隐函数的导数：

(1) $x^3+y^3-3axy=0$；

(2) $x^2+y^2-r^2=0$.